

Hilbert 曲线扫描矩阵的生成算法 及其 MATLAB 程序代码

王 笋 徐小双

(华中科技大学控制科学与工程系, 武汉 430074)

摘 要 Hilbert 曲线是一种重要的图像处理工具,在图像处理,特别是图像扫描中广泛应用。为了正确快速的生成 Hilbert 曲线扫描矩阵,提出了基于矩阵运算的生成 Hilbert 曲线扫描矩阵的新算法,并给出了 MATLAB 仿真语言的程序代码,同时用数学归纳法从理论上证明了该算法的正确性。由计算机仿真可见该算法的正确性和简单易行,最后给出了一个简单的应用例子。

关键词 Hilbert 曲线 图像扫描 MATLAB

中图分类号: TP391.41 TP309 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2006)01-0119-04

A New Algorithm of Hilbert Scanning Matrix and its MATLAB Program

WANG Sun, XU Xiao-shuang

(Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

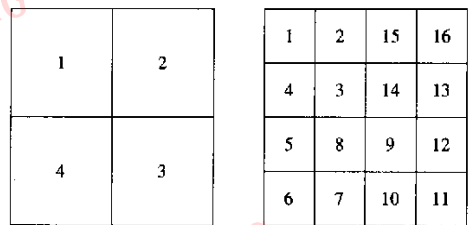
Abstract As an important image-processing tool, Hilbert curve is widely used in image processing, especially in image scanning. To produce the curve correctly and quickly, a new algorithm of Hilbert curve based on matrixes is presented with its MATLAB program, and is proved by means of mathematic induction. The latter numeral simulations also illustrate the correctness and feasibility of the algorithm in the paper. An application example of the algorithm is given in the end.

Keywords Hilbert curve, image scanning, MATLAB

1 引 言

1890年,意大利数学家 Peano 提出了 Peano 曲线,由于它可以不间断地遍历一个正方形中的所有点,并可充满整个空间,所以又称为 Fass 曲线。德国数学家 Hilbert 于 1891 年构造了一种简单的 Peano 曲线,即 Hilbert 曲线^[1,2]。

在文献[1]中,Hilbert 曲线的定义是通过正方形逐次分割的标号次序给出的,例如,一单位正方形(如图 1 所示),可将其逐级分割为 4 个相等的小正方形,图 1(a)、图 1(b)分别为一、二级分割,依次类



(a) 一级分割 (b) 二级分割

图 1 一、二级分割示意图

Fig. 1 First-order & second-order division

推。每个自然数 k ,对 $k-1$ 次分割再做细分,即得到 4^k 个 k 级正方形,每个正方形的边长为 $\frac{1}{2^k}$,可

基金项目:国家自然科学基金项目(60274004)

收稿日期:2003-10-20;改回日期:2005-03-25

第一作者简介:王笋(1979~),男,2001年获沈阳工业学院学士学位,2004年获华中科技大学控制科学与工程系硕士学位。研究领域为混沌与数字水印。E-mail:wangsun@ieslab.com.cn

记这些正方形为 $Q_i^{(k)}$ ($i=1,2,\dots,4^k$), 且它们的标号次序满足以下条件:

- ① 每个 $Q_i^{(k)}$ 包含点 $O(0,0)$;
- ② k 级正方形 $Q_{4i-3}^{(k)}, Q_{4i-2}^{(k)}, Q_{4i-1}^{(k)}, Q_{4i}^{(k)}$ 包含在 $k-1$ 级的正方形 $Q_i^{(k-1)}$ 中 ($k > 1, i=1, 2, \dots, 4^{(k-1)}$);
- ③ 任何下标为连续整数的正方形 $Q_i^{(k)}$ 与 $Q_{i+1}^{(k)}$ 具有公共边。

将以上标号按从小到大的顺序用折线连接起来就得到了 Hilbert 曲线。

Hilbert 曲线可以看作一种从 N 维 (一般是 2 维) 空间到 1 维空间的映射, 由于它能尽可能地保持原空间中相邻点的相关性, 因此目前对 Hilbert 曲线已进行了广泛地研究和应用^[2], 特别是图像处理, 如图像扫描、图像压缩等等。

2 基于矩阵运算的 Hilbert 扫描矩阵的生成算法

在国内杂志上, 虽有些文献提到了 Hilbert 曲线的计算机仿真, 但其大都是利用分形理论中的边改

$$H_{2^{k+1}} = \begin{cases} \begin{bmatrix} H_{2^k} & 4^k E_{2^k} + H_{2^k}^T \\ (4^{k+1} + 1) E_{2^k} - \hat{H}_{2^k} & (3 \times 4^k + 1) E_{2^k} - (\hat{H}_{2^k})^T \end{bmatrix}, & k \text{ 为偶数} \\ \begin{bmatrix} H_{2^k} & (4^{k+1} + 1) E_{2^k} - \hat{H}_{2^k} \\ 4^k E_{2^k} + H_{2^k}^T & (3 \times 4^k + 1) E_{2^k} - (H_{2^k}^T) \end{bmatrix}, & k \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (1)$$

其中, E 代表相应阶数的单位矩阵。

在从理论上给出证明之前, 下面先给出一个关于式(1)的命题:

由式(1)逐级得出的矩阵 $H_{2^{k+1}}$ 满足以下条件:

- ① 该矩阵的最大元素值为 4^{k+1} , 最小值元素为左上角元素, 且等于 1;
- ② 当 k 为奇数时, 所得矩阵 $H_{2^{k+1}}$ 的最大元素值在矩阵的右上角, 即 $a_{1, 2^k}$ 元素值最大; 当 k 为偶数时, 所得矩阵 $H_{2^{k+1}}$ 的最大元素值在矩阵的左下角, 即 $a_{2^k, 1}$ 元素值最大。

下面用数学归纳法证明这个命题, 先把式(1)中的 4 个子矩阵依次记为 $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$ 。

证明:

- (1) 当 k 为 1, 2 时, 易验证所得矩阵满足以上条件;
- (2) 假设当 $n=k-1$ 为奇数时, 上述条件成立, 即所得的 2^k 阶方阵右上角元素最大值为 4^k , 则 $n=k$ 为偶数时, 所得的 2^{k+1} 阶方阵 H_{11} 中的最大元素值为 4^k , H_{12}

写和点改写方法, 且该方法比较抽象, 不易实现。尽管在文献[3, 4]中已提出了基于矩阵运算的 Hilbert 曲线扫描矩阵的生成算法, 但是经研究发现, 由该算法并不能得出 Hilbert 曲线扫描矩阵, 为此, 本文给出一个新的基于矩阵运算的算法: 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}_{n \times m},$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{1,m} & \cdots & a_{1,2} & a_{1,1} \\ a_{2,m} & \cdots & a_{2,2} & a_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,m} & \cdots & a_{n,2} & a_{n,1} \end{bmatrix}_{n \times m},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

记 2^n 阶 Hilbert 曲线扫描矩阵为 H_{2^n} , 且 $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$,

则构造 Hilbert 曲线扫描矩阵的递推算法如下:

中的最大元素值为 $4^k + 4^k = 2 \times 4^k$, H_{21} 中的最大元素值为 $4^{k+1} + 1 - 1 = 4^{k+1}$, H_{22} 中的最大元素值为 $3 \times 4^k + 1 - 1 = 3 \times 4^k$ 。由于 H_{21} 中 \hat{H}_{2^k} 的最小值 1 已经位于左下角, 所以命题得证。当 $k-1$ 为偶数时, 类似可证, 从略。

下面用这个命题证明本文的算法。

根据本文的算法和文献[1]中的定义不难看出, 由于式(1)显然满足定义(见本文引言)中的条件①②, 因此只需证明条件③即可, 又由于 $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$ 4 个子矩阵部分各自都是由连续整数构成的, 所以只需证明 4 个子矩阵部分之间有衔接, 即相差 1 即可。

证明: 当 k 为奇数时, $k-1$ 为偶数, 由上面所得的预命题可知, H_{2^k} 的最大元素值为 4^k , 即 H_{11} 的最大元素值为 4^k , 即 $H_{2^{k+1}}$ 的元素 $a_{2^k, 1} = 4^k$; H_{21} 的最小元素值为 $4^k + 1$, 最大元素值为 $4^k + 4^k$, 即 $H_{2^{k+1}}$ 的元素 $a_{2^k+1, 1} = 4^k + 1, a_{2^k+1, 2^k} = 4^k + 4^k$; H_{22} 的最小元素值为 $2 \times 4^k + 1$, 最大元素值为 3×4^k , 即 $H_{2^{k+1}}$ 的元素

$a_{2^{k+1}, 2^{k+1}} = 2 \times 4^k + 1, a_{2^{k+1}, 2^k} = 3 \times 4^k$; H_{12} 的最小元素值为 $3 \times 4^k + 1$, 即 $H_{2^{k+1}}$ 的元素 $a_{2^k, 2^{k+1}} = 3 \times 4^k + 1$ 。这样就证明了 $a_{2^k, 1}$ 与 $a_{2^k+1, 1}$, $a_{2^k+1, 2^k}$ 与 $a_{2^k+1, 2^k+1}$, $a_{2^k+1, 2^k+1}$ 与 $a_{2^k, 2^k+1}$ 之间的衔接。同理可证明, 当 k 为偶数时, 4 个子矩阵部分的衔接在 $a_{1, 2^k}$ 与 $a_{1, 2^k+1}$, $a_{2^k, 2^k+1}$ 与 $a_{2^k+1, 2^k+1}$, $a_{2^k+1, 2^k}$ 与 $a_{2^k+1, 2^k}$ 之间。

3 MATLAB 程序代码

本文算法相应的程序代码为:

```
function Hilbertmatrix
% 生成 Hilbert 扫描矩阵的主函数
H0 = [1 2; 4 3];
flag = 0;
k = input('Please input the integer k = ');
for i = 1:k
    if flag == 0
        H = [H0, (4^(i+1) + 1) * ones(2^i) - leftright(H0);
            (4^i) * ones(2^i) + H0', (3 * 4^i + 1) * ones(2^i) -
            leftright(H0')];
        else
            H = [H0, (4^i) * ones(2^i) + H0';
                (4^(i+1) + 1) * ones(2^i) - updown(H0), (3 * 4^i + 1)
```

```
* ones(2^i) - (leftright(H0))'];
    end;
    flag = 1 - flag;
    H0 = H;
end
['k = ', num2str(k), '时, 所得', num2str(2^(k+1)), '阶矩阵为'], H
function y = leftright(x) % 该函数将一个矩阵左右颠倒
sizecolumn = size(x, 2);
for j = 1:sizecolumn
    y(:, j) = x(:, sizecolumn + 1 - j);
end
function y = updown(x) % 该函数将一个矩阵上下颠倒
sizerow = size(x, 1);
for i = 1:sizerow
    y(i, :) = x(sizerow + 1 - i, :);
end
```

4 仿真结果

根据本文以上程序生成的矩阵, 用线段按顺序连接起来, 即可得到所需要的 Hilbert 曲线, 并可以检验本文算法的正确性(如图 2 所示)。

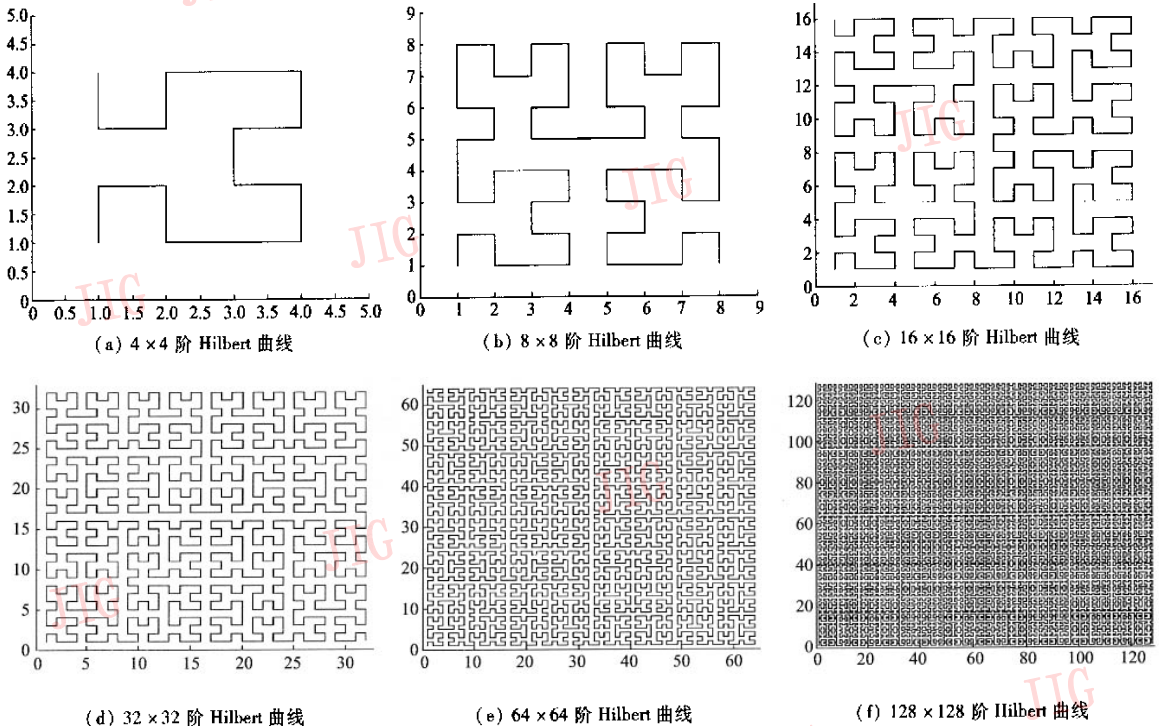


图 2 仿真程序生成的各阶曲线
Fig. 2 Hilbert curves with the program

由图 2 可见,本文的算法可以快速准确地生成各阶 Hilbert 曲线。

5 应用举例

下面给出一个应用 Hilbert 曲线对图像进行处理的简单例子。

以 MATLAB 提供的 128×128 的 woman2 灰度

图像为例,用由以上算法和程序所得的 Hilbert 扫描矩阵对该图像进行扫描的结果如图 3 所示。

图 3(a)是原始图像,图 3(b)是用 Hilbert 曲线对其扫描后所得到的 1 维曲线,另外利用 Hilbert 曲线还可以对原图像进行置乱,这种处理在图像的保密通讯和信息隐藏中常常用到^[5]。置乱后的图像如图 3(c)所示。由图 3 可见,置乱效果较好,表明用本文算法生成的 Hilbert 曲线可以对图像进行置乱处理。

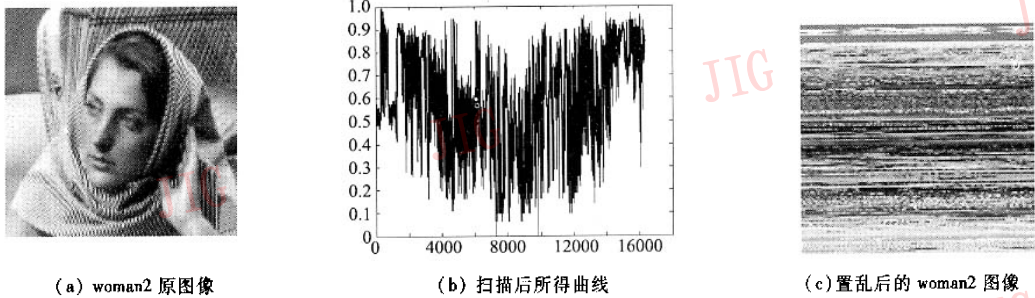


图 3 Hilbert 曲线应用于图像处理的示例

Fig. 3 An application example of Hilbert curve in image processing

6 结论

鉴于 Hilbert 曲线在图像处理中的重要性和 MATLAB 仿真语言的广泛应用,本文对基于矩阵运算的 Hilbert 扫描矩阵的算法进行了探讨,并给出了算法公式以及数学证明和程序代码。仿真结果表明,所给出的算法是正确的,相应的程序也是简单易行的。

参考文献 (References)

- 1 QI Dong-xu. Fractal and computer application[M]. Beijing: Science Press, 1994:15 ~ 18. [齐东旭. 分形及其计算机生成[M]. 北京: 科学出版社,1994:15 ~ 18.]
- 2 Kamata Sei-ichiro, Eason Richard O, Bandou Yukihiko. A new algorithm for N-dimensional Hilbert scanning[J]. IEEE Transactions

on image processing, 1999,8(7):964 ~ 972.

- 3 LIU Xiang-dong, ZHU Zhi-liang, WANG Guang-xing, et al. Measuring the undulation of the image scanning and a fast Hilbert scanning matrix constructing algorithm[J]. Journal of Image and Graphics, 2002,7(6):539 ~ 542. [刘向东,朱志良,王光兴等. 图象扫描波动性度量及 Hilbert 扫描矩阵的快速生成[J]. 中国图象图形学报, 2002,7(6):539 ~ 542.]
- 4 LIU Xiang-dong, DUAN Xiao-dong, WANG Guang-xing, et al. Measurement of undulation on image scanning and a fast algorithm for constructing Hilbert scanning matrix[J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2002,17(2):146 ~ 150. [刘向东,段晓东,王光兴等. 图像扫描波动性定量标准及分形扫描矩阵的快速生成[J]. 数据采集与处理, 2002,17(2):146 ~ 150.]
- 5 DING Wei, QI Dong-xu. Digital image transformation and information hiding and disguising technology[J]. Chinese Journal Computers, 1998,21(9):838 ~ 843. [丁玮,齐东旭. 数字图像变换及信息隐藏与伪装技术[J]. 计算机学报, 1998,21(9):838 ~ 843.]